



TITLE:

線型セル構造オートマトンのイデ アル論的アプローチ (形式言語理論 とオートマトン理論)

AUTHOR(S):

佐藤, 忠一

CITATION:

佐藤, 忠一. 線型セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ (形式言語理論とオートマトン理論). 数理解析研究所講究録 1982, 458: 192-200

ISSUE DATE:

1982-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103072>

RIGHT:

線型セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ

東洋大学 工学部

佐藤 忠一

1. まえがき

セル構造オートマトンの局所関数が線型の時、線型セル構造オートマトンという。ここでは、セルの取り得る状態集合として \mathbb{Z}_m や有限可換環 R を考える。

\mathbb{Z}_m 上と R 上の線型セル構造オートマトンは、多くの共通の性質を持ち、それらの間にはある種の対応が存在する。 \mathbb{Z}_m 上の諸結果を R 上に対応させるには、 \mathbb{Z}_m 上の概念をイデアル論的な表現に書き直す必要がある。

2. 準備

R 上の線型セル構造オートマトンは、 (\mathbb{Z}^k, R, N, f) で与えられ、 \mathbb{Z} は整数の集合、 \mathbb{Z}^k はセルの集合、 R は各セルが取り得る状態の集合で有限可換環、 N は \mathbb{Z}^k の有限部

分集合で、 $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。Nは近傍を表わす。fは、 $R^n \rightarrow R$ への線型写像で $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ である。fは線型局所関数と呼ばれる。

\mathbb{Z}^k から R への写像を様相という。様相の集合を C と書く。fに対して、写像 $f_\infty : C \rightarrow C$ を次のように定める。 $x, y \in C$ に対して、

$$f_\infty(x) = y \Leftrightarrow y(r) = \sum_{j=1}^n a_j x(r+v_j)$$

ここで、 $r+v_1, \dots, r+v_n$ なる n 個のセルは、セル $r \in \mathbb{Z}^k$ の近傍と呼ばれる。 f_∞ を線型並列写像又は線型全域関数と言う。

定義1

- f が単射 $\Leftrightarrow f_\infty$ が単射
- f が全射 $\Leftrightarrow f_\infty$ が全射
- f_∞ が位数有限 $\Leftrightarrow \exists n > 0, f_\infty^n = I$ (I は恒等写像)
- f_∞ が位数無限 $\Leftrightarrow f_\infty$ は単射かつ $\forall n, f_\infty^n \neq I$
- f が位数有限 $\Leftrightarrow \exists$ 近傍 N, f_∞ が位数有限
- f が位数無限 $\Leftrightarrow \forall$ 近傍 N, f_∞ が位数無限

3. 線型局所関数の単射性, 全射性

以下の左側に \mathbb{Z}_m 上の, 右側に R 上の線型セル構造が一

トマトンの結果を並記する。

Σ_m 上のセル構造オートマトン

定義 2 $m = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ とする。

$f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して θ_j を

$$\theta_j = \{i \mid p_i \nmid a_j\}$$

とする。 $p_i \nmid a_j$ は、 a_j は p_i で割り切れないことを示す。

定理 1 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要
十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

となることである。

定理 2 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要
十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \text{ かつ}$$

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$

R 上のセル構造オートマトン

定義 2' R のすべての極大

イデアルを A_1, \dots, A_l とする。

$f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して θ_j を

$$\theta_j = \{i \mid a_j \notin A_i\}$$

とする。

定理 1' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要
十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

となることである。

定理 2' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要
十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \text{ かつ}$$

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$

となることである。

となることである。

定理3 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して
 f が位数有限になるための
 必要十分条件は、

$$\exists j, \quad \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

かつ $i \neq j$ ならば、 $\theta_i = \phi$
 となることである。

定理3' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して
 f が位数有限になるための
 必要十分条件は、

$$\exists j, \quad \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

かつ $i \neq j$ ならば、 $\theta_i = \phi$
 となることである。

定理4 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して
 f が位数無限になるための
 必要十分条件は、

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \quad \text{かつ}$$

$i \neq j$ ならば、 $\theta_i \cap \theta_j = \phi$ かつ
 各 θ_j に対して、 $|\theta_j| < l$

定理4' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して
 f が位数無限になるための
 必要十分条件は、

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \quad \text{かつ}$$

$i \neq j$ ならば、 $\theta_i \cap \theta_j = \phi$ かつ
 各 θ_j に対して、 $|\theta_j| < l$

系1 $m = p^r$ とする。

この時、単射である線型局所
 関数はすべて位数有限である。

系1' R を局所環とする。

この時、単射である線型局所
 関数はすべて位数有限である。

系2 $m = p_1 p_2 \dots p_\ell$ ($\ell > 1$)

系2' R を2個以上の有

とする。この時、スコープ中
2以上の線型局所関数は、
すべて位数無限である。

定理5 スコープ中 n 以下の
全射である線型局所関数
の個数 $\varphi_n(m)$ は次式で与え
られる。

$$\varphi_n(m) = m^n \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{p_i^n}\right)$$

定理6 スコープ中 n 以下の
単射である線型局所関数
の個数 $\psi_n(m)$ は次式で与え
られる。

$$\psi_n(m) = n^{\ell} \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell} p_i} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (p_i - 1)$$

定理7 スコープ中 n 以下の
位数有限の線型局所関数
の個数 $F_n(m)$ は次式で与え
られる。

限体からなる直和環とする。
この時、スコープ中2以上の
線型局所関数は、すべて
位数無限である。

定理5' スコープ中 n 以下の
全射である線型局所関数
の個数 $\varphi_n(R)$ は次式で与え
られる。

$$\varphi_n(R) = |R|^n \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{|R_{A_i}|^n}\right)$$

定理6' スコープ中 n 以下の
単射である線型局所関数
の個数 $\psi_n(R)$ は次式で与え
られる。

$$\psi_n(R) = n^{\ell} \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell} |R_{A_i}|} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (|R_{A_i}| - 1)$$

定理7' スコープ中 n 以下の
位数有限の線型局所関数
の個数 $F_n(R)$ は次式で与えら
れる。

$$F_n(m) = n \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell} p_i} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (p_i - 1)$$

系 3 スコープ中 n 以下の
位数無限の線型局所関数
の個数 $I_n(m)$ は次式で与え
られる。

$$I_n(m) = (n^{\ell} - n) \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell} p_i} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (p_i - 1)$$

系 4 位数無限の線型局所
関数が存在しないための必
要十分条件は、スコープ中が
1 であるか又は $m = p^r$ かの
いずれかが成立する。

系 5 スコープ中 n 以下の単
射、全射の線型局所関数の
個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(m)}{\varphi_n(m)} = \frac{n^{\ell}}{\prod_{i=1}^{\ell} (1 + p_i + \cdots + p_i^{n-1})}$$

系 6 次式が成立する。

$$F_n(R) = n \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell} |R_{A_i}|} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (|R_{A_i}| - 1)$$

系 3' スコープ中 n 以下
の位数無限の線型局所関数
の個数 $I_n(R)$ は次式で与え
られる。

$$I_n(R) = (n^{\ell} - n) \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell} |R_{A_i}|} \right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (|R_{A_i}| - 1)$$

系 4' 位数無限の線型局所
関数が存在しないための必
要十分条件は、スコープ中が
1 であるか又は R が局所環
であるかのいずれかが成立する。

系 5' スコープ中 n 以下の単
射、全射の線型局所関数の
個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(R)}{\varphi_n(R)} = \frac{n^{\ell}}{\prod_{i=1}^{\ell} (1 + |R_{A_i}| + \cdots + |R_{A_i}|^{n-1})}$$

系 6' 次式が成立する。

$$F_n(m) / \gamma_n(m) = \frac{1}{n^{\ell-1}}$$

性質 1 $m = p_1^{r_1} \cdots p_\ell^{r_\ell}$ とする。

Σ_m においてイデアル $(p_i^{r_i})$

はべき等イデアルであり

$$(p_i) \supseteq (p_i)^2 \supseteq \cdots \supseteq (p_i)^{r_i} = (p_i)^{r_i+1}$$

である。

定理 8 1次元セル空間に

において、全射である $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

に対して、その並列写像は

定数対1写像であり、この

定数を $|f|_m$ で表わすと $|f|_m$

は次式によって与えられる。

$$|f|_m = \prod_{i=1}^{\ell} (p_i^{r_i})^{n_i-1}$$

但し、 n_i は $\text{mod } p_i$ における

f のスコープ中である。

定理 9 1次元セル空間に

において、 $K = \prod_{i=1}^{\ell} (p_i^{r_i})^{n_i-1}$ とする。

K 対1写像となるスコープ中

$$F_n(R) / \gamma_n(R) = \frac{1}{n^{\ell-1}}$$

定義 3' R の極大イデアル A_i

に対して、 A_i によって生成さ

れるべき等イデアル B_i とは

$$A_i \supseteq A_i^2 \supseteq \cdots \supseteq A_i^s = A_i^{s+1}$$

なる時の A_i^s を表わす。

定理 8' 1次元セル空間に

において、全射である $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

に対して、その並列写像は

定数対1写像であり、この

定数を $|f|_R$ で表わすと $|f|_R$

は次式によって与えられる。

$$|f|_R = \prod_{i=1}^{\ell} |f/B_i|^{n_i-1}$$

但し、 n_i は R/A_i における f の

スコープ中である。

定理 9' 1次元セル空間に

において、正の整数 K に対して

$(n_1^{\sharp}, n_2^{\sharp}, \dots, n_\ell^{\sharp})$ を次式を満足

n 以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^l p_i}\right)^n \prod_{i=1}^l (n-n_i+1)(p_i-1) p_i^{2-\left[\frac{1}{p_i}\right] \frac{n_i-2+n_i-2}{2}}$$

ここで $[]$ は ガウス記号

定理10 2次元以上のセル空間において、 φ を全射である線型局所関数とする時、次の(1)~(4)は互いに等価である。

- (1) φ は単射である
- (2) $|\varphi|_m < \infty$
- (3) $\forall x \in C, |\varphi_\infty^{-1}(x)| < \infty$
- (4) $\exists x \in C, |\varphi_\infty^{-1}(x)| < \infty$

する S 個の正の整数の l 組とする。 $1 \leq j \leq S$

$$K = \prod_{i=1}^l |R/B_i|^{n_i^j-1}$$

この時 K に対し写像となるスコープ中 n 以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^l |R_{A_i}|}\right)^n \prod_{i=1}^l (n-n_i^j+1)(|R_{A_i}|-1) |R_{A_i}|^{2-\left[\frac{1}{p_i}\right] \frac{n_i^j-2+n_i^j-2}{2}}$$

ここで $[]$ はガウス記号

定理10' 2次元以上のセル空間において、 φ を全射である線型局所関数とする時、次の(1)~(4)は互いに等価である。

- (1) φ は単射である
- (2) $|\varphi|_R < \infty$
- (3) $\forall x \in C, |\varphi_\infty^{-1}(x)| < \infty$
- (4) $\exists x \in C, |\varphi_\infty^{-1}(x)| < \infty$

4. まとめ

\mathbb{Z}_m 上と R 上の線型セル構造オートマトンは、次のような対応が考えられる。

\mathbb{Z}_m	R
$m = p_1^{r_1} \cdots p_\ell^{r_\ell}$	$ R $
(p_i)	A_i (極大イデアル)
p_i	$ R/A_i $
$(p_i^{r_i})$	B_i (べき等イデアル)
$p_i^{r_i}$	$ R/B_i $
ℓ	R の極大イデアルの個数
n (スコープ巾)	n (スコープ巾)
$p_i \mid a_j$	$a_j \in A_i$

5. 結論 \mathbb{Z}_m 上の線型セル構造オートマトンを調べれば、 R 上のそれは、ほぼ推定される。